第28卷 第2期 工 程 数 学 学 报 Vol. 28 No. 2
2011年04月 CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS Apr. 2011

**文章编号**:1005-3085(2011)02-0176-11

# 基于$\beta$面截断重要抽样法可靠性灵敏度估计及其方差分析*

张 峰[1,2]， 吕震宙[2]， 崔利杰[2]

(1- 西北工业大学力学与土木建筑学院，西安 710129； 2- 西北工业大学航空学院，西安 710072)

**摘 要**: 基于$\beta$面的截断重要抽样法可以用来求解单失效模式可靠性灵敏度. 该方法在设计点处作失效面的虚拟切面$\beta$面，而$\beta$面将变量空间分割成重要抽样区域$R$和非重要抽样区域$S$. 在$R$和$S$区域分别建立相应的截断重要抽样密度函数$h_R(\mathbf{x})$和$h_S(\mathbf{x})$，从$h_R(\mathbf{x})$和$h_S(\mathbf{x})$中抽取的样本量按照$R$和$S$区域对可靠性灵敏度的贡献来分配，并通过迭代模拟计算来得到. 本文推导了基于$\beta$面截断重要抽样法的可靠性灵敏度估计值方差和变异系数的计算公式，并将该方法推广应用到并联系统中. 算例结果表明：在估计值相对误差小于2%、可靠性灵敏度估计值变异系数相同时，基于$\beta$面的截断重要抽样法的可靠性灵敏度估计所需的样本数比传统重要抽样法、$\beta$球截断重要抽样法计算量少.

**关键词**: 设计点；$\beta$截面；$\beta$面截断重要抽样法；可靠性灵敏度；变异系数

**分类号**: **AMS**(2000) 90B25 **中图分类号**: O213.2 **文献标识码**: A

## 1 引言

可靠性灵敏度常采用结构失效概率对基本变量分布参数的偏导数来度量，由于可靠性灵敏度对结构可靠性优化设计极为重要，因而得到广泛关注[1-14]. 可靠性灵敏度分析方法可分为近似解析法和数字模拟法. 近似解析法一般基于改进的一次二阶矩法对可靠性作灵敏度分析，其计算相对简单，但该方法不适应非线性显著的极限状态方程情况. 虽然数字模拟法比近似解析法有更为广泛的应用范围，但基于Monte-Carlo法的可靠性灵敏度分析对小概率问题计算效率很低，这在工程上难以接受. 为了加快收敛速度，降低计算量，研究人员对Monte-Carlo法作了很多改进，最为常见的有重要抽样法[4-10]、线抽样法[11,12]、$\beta$球重要截断抽样法[13,14]等，这些方法在结构可靠性灵敏度分析上均有很好的应用，其中重要抽样法研究最为广泛. 文献[8]从提高投点效率出发，将重要抽样函数的密度中心放在极限状态方程的设计点处，从而使得在极限状态方程非线性程度不太大时，落入失效域的样本点可以达到50%. 文献[9]推导了基于重要抽样法下可靠性灵敏度估计量的方差和变异系数，给出了可靠性灵敏度估计量在给定置信度下的置信区间. 在标准正态空间中，以原点为球心，可靠度指标$\beta$为半径，建立$\beta$超球面将变量空间分割成$\beta$超球外区域和$\beta$超球内区域，落入$\beta$超球内的样本点无需代入功能函数计算其响应值即可断定其在安全域内，这种基于$\beta$超球的截断抽样法在很大程度上减少了计算功能函数的次数. 文献[14]综合重要抽样和$\beta$超球截断抽样的优点，提出了一种基于$\beta$球的截断重要抽样法，通过引入以均值点为球心、可靠度指标为半径的$\beta$超球，并将重要抽样

**收稿日期**: 2009-05-18. **作者简介**: 张峰(1982年5月生)，男，博士. 研究方向：飞行器设计可靠性工程.

***基金项目**: 国家自然科学基金(10572117; 50875213)；新世纪优秀人才支持计划(NCET-05-0868)；航空基础基金(2007ZA53012)；民口863计划(2007AA04Z401).

区域控制在$\beta$超球外，从而减少了重要抽样函数在结构安全域的抽样，提高了抽样效率．文献[14]还将该方法推广到多失效模式串联系统的可靠性灵敏度分析中，推导了可靠性灵敏度估计值的方差和变异系数计算公式．与传统重要抽样法相比，该方法对低维问题计算量减少可以达到50%．然而该方法存在两个方面的不足：1) 必须得到准确的可靠度指标$\beta$值，如果估算的$\beta$球半径大于实际可靠度指标，会导致可靠性灵敏度存在估算误差；2) 研究对象维数越高，该方法效率越低[13]．本文针对上述不足之处，提出一种基于$\beta$面分界的重要抽样法，来求解单失效模式结构可靠性灵敏度．该方法在传统的重要抽样方法基础上，在设计点处作关于失效域的切面，即$\beta$截面，将变量空间分割成重要抽样区域$R$和非重要抽样区域$S$，采用基于$\beta$面截断的重要抽样函数抽取样本，区域样本量依据该区域对可靠性灵敏度贡献额来分配，而贡献额在抽样过程通过迭代模拟得到．算例表明，在相同的计算精度下，基于$\beta$面的截断重要抽样法所需的样本数为传统重要抽样法的50%．

## 2　基于重要抽样法的可靠性参数灵敏度分析

由于独立正态变量具有一定的普遍性，因此本文主要研究独立正态变量情况，即假设所研究问题包含$n$维基本向量$\mathbf{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$相互独立且均服从正态分布，$\mathbf{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,(i=1,2,\cdots,n)$，$\mu_i$和$\sigma_i^2$分别为$x_i^2$均值与标准差的名义值．

### 2.1　基于Monte-Carlo数字模拟法的可靠性灵敏度分析

设极限状态变量$g(\mathbf{x})$是$n$维基本随机向量$\mathbf{x}$的函数，则失效域$F$和失效概率$P_f$可表示为

$$F=\big\{\mathbf{x}:g(\mathbf{x})<0\big\}, \tag{1}$$

$$P_f=P\big\{\mathbf{x}:\mathbf{x}\in F\big\}=\int_F f(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}, \tag{2}$$

其中$f(\mathbf{x})$是基本随机向量$\mathbf{x}$的联合概率密度函数．由于可靠性灵敏度可定义为失效概率对基本变量分布参数的偏导数，因此(2)式对第$i$个基本变量$x_i$的分布参数$\theta_i\,(\theta_i=\mu_i,\,\sigma_i)$的可靠性灵敏度如下

$$\frac{\partial P_f}{\partial\theta_i}=\int_F\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial\theta_i}\mathrm{d}\mathbf{x}=\int_D I_F(\mathbf{x})\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial\theta_i}\mathrm{d}\mathbf{x}=\int_D\frac{I_F(\mathbf{x})}{f(\mathbf{x})}\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial\theta_i}f(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x},\quad i=1,2,\cdots,n, \tag{3}$$

其中$D$为整个变量空间，$I_F(\mathbf{x})$为满足

$$I_F(\mathbf{x})=\begin{cases}0, & g(\mathbf{x})\geq 0,\\ 1, & g(\mathbf{x})<0,\end{cases}$$

的示性函数．

由数理统计知识[15]，可推出(3)式基于Monte-Carlo数字模拟的无偏估计值$\partial\hat{P}_f/\partial\theta_i$及其方差$\mathrm{Var}(\partial\hat{P}_f/\partial\theta_i)$分别如下

$$\frac{\partial\hat{P}_f}{\partial\theta_i}=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{I_F(\mathbf{x}_j)}{f(\mathbf{x}_j)}\frac{\partial f(\mathbf{x}_j)}{\partial\theta_i},\quad i=1,2,\cdots,n, \tag{4}$$

$$\mathrm{Var}\Big(\frac{\partial\hat{P}_f}{\partial\theta_i}\Big)=\frac{1}{N-1}\Big\{\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\Big[\frac{I_F(\mathbf{x}_j)}{f(\mathbf{x}_j)}\frac{\partial f(\mathbf{x}_j)}{\partial\theta_i}\Big]^2-\Big[\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{I_F(\mathbf{x}_j)}{f(\mathbf{x}_j)}\frac{\partial f(\mathbf{x}_j)}{\partial\theta_i}\Big]^2\Big\}, \tag{5}$$

其中 $\mathbf{x}_j$ 为来自于联合概率密度函数 $f(\mathbf{x})$ 的第 $j$ 个子样，$N$ 为抽样总量.

### 2.2 基于重要抽样的可靠性灵敏度分析

Monte-Carlo 法收敛速度仅为 $O(1/\sqrt{N})$，当研究对象为小概率问题时，需要很大样本量才使 (4) 式得到收敛的结果．为了加快算法的收敛速度．文献 [8] 将重要抽样函数 $h(\mathbf{x})$ 引入到可靠性灵敏度分析中，$h(\mathbf{x})$ 选用与基本随机向量概率密度函数 $f(\mathbf{x})$ 相近的样式，即保持重要抽样函数 $h(\mathbf{x})$ 的方差和原概率密度函数的方差一致．文献 [10] 研究表明，重要抽样函数 $h(\mathbf{x})$ 的形式确定其抽样效率，对于不同的分布参数 $\theta_i$，可靠性灵敏度积分计算贡献大的样本点存有差异，即对于不同分布参数 $\theta_i$ 而言，可靠性灵敏度积分运算所要求的重要抽样函数的密度中心是不同的．如果对每个分布参数 $\theta_i$ 均构造其相应的最佳重要抽样函数，这需要花费很大的工作量来获得重要抽样法的密度中心．如果将重要抽样函数的密度中心放在 $\max(I_F(\mathbf{x})f(\mathbf{x}))$ 对应的样本，即结构最可能失效点，对每个分布参数可靠性灵敏度的积分计算而言，这样构造重要抽样函数的密度中心不是最优，但只要一次寻找到 $\max(I_F(\mathbf{x})f(\mathbf{x}))$ 对应的样本点，就可建立重要抽样概率密度函数来计算所有分布参数的可靠性灵敏度．对单失效模式而言，$\max(I_F(\mathbf{x})f(\mathbf{x}))$ 所处的样本，对应于极限状态方程的设计点，这可以通过改进一次二矩法求得.

引入重要抽样密度函数 $h(\mathbf{x})$，则 (3) 式的可靠性灵敏度可改写为

$$\frac{\partial P_f}{\partial\theta_i}=\int_D\frac{I_F(\mathbf{x})}{h(\mathbf{x})}\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial\theta_i}h(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}=\mathrm{E}\Big[\frac{I_F(\mathbf{x})}{h(\mathbf{x})}\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial\theta_i}\Big],\quad i=1,2,\cdots,n,\tag{6}$$

其中重要抽样密度函数 $h(\mathbf{x})$ 满足

$$\int_D h(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}=1.$$

由 (6) 式可以推导出基于重要抽样法的可靠性灵敏度无偏估计 $\partial\hat{P}_f/\partial\theta_i$ 及其方差 $\mathrm{Var}(\partial\hat{P}_f/\partial\theta_i)$ 分别如下

$$\partial\hat{P}_f/\partial\theta_i=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{I_F(\mathbf{x}_j)}{h(\mathbf{x}_j)}\frac{\partial f(\mathbf{x}_j)}{\partial\theta_i},\quad i=1,2,\cdots,n,\tag{7}$$

$$\mathrm{Var}(\partial\hat{P}_f/\partial\theta_i)=\frac{1}{N-1}\Big\{\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\Big[\frac{I_F(\mathbf{x}_j)}{h(\mathbf{x}_j)}\frac{\partial f(\mathbf{x}_j)}{\partial\theta_i}\Big]^2-\Big[\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{I_F(\mathbf{x}_j)}{h(\mathbf{x}_j)}\frac{\partial f(\mathbf{x}_j)}{\partial\theta_i}\Big]^2\Big\},\tag{8}$$

其中 $\mathbf{x}_j$ 为来自于联合概率密度函数 $f(\mathbf{x})$ 的第 $j$ 个子样，$N$ 为抽样总量.

## 3 基于 $\beta$ 面截断重要抽样法的可靠性参数灵敏度分析

### 3.1 基于 $\beta$ 面截断重要抽样法可靠性灵敏度估算

基于上述研究，本文在设计点 $\mathbf{D_x}=(D_{x_1},D_{x_2},\cdots,D_{x_n})$ 处作失效面的虚拟切面，即 $\beta$ 面，$\beta$ 面将变量空间 $D$ 分解成重要区域 $R$ 和非重要区域 $S$，如图1所示，虚拟切面的含义是不需要写出切面的方程，而直接由

$$R=\Big\{\mathbf{x}:\sum_{i=1}^{n}\big((x_i-\mu_i)/\sigma_i\big)^2-\sum_{i=1}^{n}\big((x_i-D_{x_i})/\sigma_i\big)^2-\beta^2\geq 0\Big\},\tag{9}$$

$$S=\Big\{\mathbf{x}:\sum_{i=1}^{n}\big((x_i-\mu_i)/\sigma_i\big)^2-\sum_{i=1}^{n}\big((x_i-D_{x_i})/\sigma_i\big)^2-\beta^2<0\Big\}\tag{10}$$

所示的几何关系来确定$R$和$S$区域，这对于隐式函数来说可以减少较大的计算工作量，因为作切面需要求隐函数的偏导数.

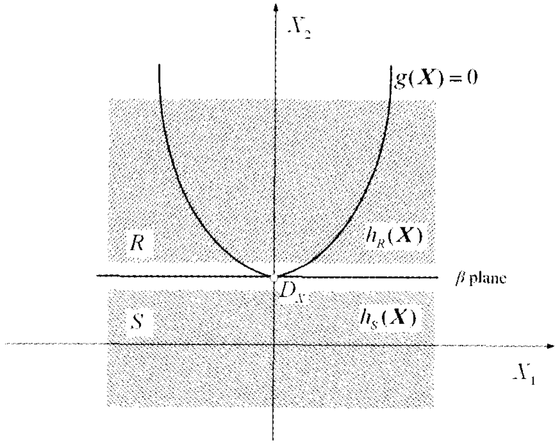


图 1:　重要抽样区域$R$与非重要抽样区域$S$示意图

将变量空间由虚拟切面$\beta$面划分为$R$和$S$区域后，可靠性灵敏度$\partial P_f/\partial\theta_i$可由整个变量空间$D$的失效概率分解成$R$和$S$区域的失效概率$\partial P_{Rf}/\partial\theta_i$和$\partial P_{Sf}/\partial\theta_i$之和.

$$\begin{aligned}\partial P_f/\partial\theta_i &= \partial P_{Rf}/\partial\theta_i+\partial P_{Sf}/\partial\theta_i\\ &= \int_R \frac{I_F(\mathbf{x})}{h_R(\mathbf{x})}\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial\theta_i}h_R(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}+\int_S \frac{I_F(\mathbf{x})}{h_S(\mathbf{x})}\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial\theta_i}h_S(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x},\end{aligned}\tag{11}$$

其中$h_R(\mathbf{x})$和$h_S(\mathbf{x})$为截断重要抽样函数，可取为以下形式

$$h_R(\mathbf{x})=\begin{cases}0, & \mathbf{x}\notin R,\\ h(\mathbf{x})/\int_R h(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}, & \mathbf{x}\in R,\end{cases}\tag{12}$$

$$h_S(\mathbf{x})=\begin{cases}0, & \mathbf{x}\notin S,\\ h(\mathbf{x})/\int_S h(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}, & \mathbf{x}\in S,\end{cases}\tag{13}$$

故可靠性灵敏度基于$\beta$面截断重要抽样的无偏估计为

$$\begin{aligned}\partial \hat{P}_f/\partial\theta_i &= \partial \hat{P}_{Rf}/\partial\theta_i+\partial \hat{P}_{Sf}/\partial\theta_i\\ &= \sum_{R_j=1}^{N_R}\frac{1}{N_R}\frac{I_F(\mathbf{x}_{R_j})}{h_R(\mathbf{x}_{R_j})}\frac{\partial f(\mathbf{x}_{R_j})}{\partial\theta_i}+\sum_{S_j=1}^{N_S}\frac{1}{N_S}\frac{I_F(\mathbf{x}_{S_j})}{h_S(\mathbf{x}_{S_j})}\frac{\partial f(\mathbf{x}_{S_j})}{\partial\theta_i}\beta,\quad i=1,2,\cdots,n,\end{aligned}\tag{14}$$

其中$\mathbf{x}_{R_j},\mathbf{x}_{S_j}$分别来自$\beta$面截断重要抽样函数$h_R(\mathbf{x}),h_S(\mathbf{x})$的第$j$个样本，$N_R,N_S$分别为$h_R(\mathbf{x})$, $h_S(\mathbf{x})$的样本数量. 在独立正态变量情况下，$n$维变量的联合概率密度函数$f(\mathbf{x})$可改写成每个变量边缘概率密度函数$f_i(x_i)$ $(i=1,2,\cdots,n)$的乘积形式，即

$$f(\mathbf{x})=\prod_{i=1}^{n}f_i(x_i),$$

且 $\theta_i$ 只与 $f_i(x_i)$ 有关．当 $\theta_i = \mu_i$ 时

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \theta_i} = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mu_i} = \frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i^2} f(\mathbf{x}), \quad i = 1, 2, \cdots, n, \tag{15}$$

当 $\theta_i = \sigma_i$ 时，

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \theta_i} = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \sigma_i} = \frac{1}{\sigma_i}\Big[\Big(\frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i}\Big)^2 - 1\Big] f(\mathbf{x}), \quad i = 1, 2, \cdots, n, \tag{16}$$

将 (15), (16) 式代入 (14) 式，得到可靠性灵敏度估计值 $\partial \hat{P}_f / \partial \mu_i$ 和 $\partial \hat{P}_f / \partial \sigma_i$ 的具体表达式如下

$$\begin{aligned} \partial \hat{P}_f / \partial \mu_i = & \sum_{R_j=1}^{N_R} \frac{f(\mathbf{x}_{R_j})}{N_R} \frac{I_F(\mathbf{x}_{R_j})}{h_R(\mathbf{x}_{R_j})} \frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i^2} \\ & + \sum_{S_j=1}^{N_S} \frac{f(\mathbf{x}_{S_j})}{N_S} \frac{I_F(\mathbf{x}_{S_j})}{h_S(\mathbf{x}_{S_j})} \frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i^2}, \quad i = 1, 2, \cdots, n, \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} \partial \hat{P}_f / \partial \sigma_i = & \sum_{R_j=1}^{N_R} \frac{f(\mathbf{x}_{R_j})}{N_R} \frac{I_F(\mathbf{x}_{R_j})}{h_R(\mathbf{x}_{R_j})} \frac{1}{\sigma_i}\Big[\Big(\frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i}\Big)^2 - 1\Big] \\ & + \sum_{S_j=1}^{N_S} \frac{f(\mathbf{x}_{S_j})}{N_S} \frac{I_F(\mathbf{x}_{S_j})}{h_S(\mathbf{x}_{S_j})} \frac{1}{\sigma_i}\Big[\Big(\frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i}\Big)^2 - 1\Big]. \end{aligned} \tag{18}$$

### 3.2 基于 $\beta$ 面截断重要抽样可靠性灵敏度估计值的方差分析

采用数字模拟的方法对真值进行估计均是近似的，为了对基于 $\beta$ 面截断重要抽样法的收敛性有所了解，有必要对估计值作方差分析．对 (11) 式所示的估计值求数学期望和方差可得

$$\mathrm{E}\big[\partial P_f / \partial \theta_i\big] = \mathrm{E}\Big[\frac{I_F(\mathbf{x})}{h_R(\mathbf{x})} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \theta_i}\Big] + \mathrm{E}\Big[\frac{I_F(\mathbf{x})}{h_S(\mathbf{x})} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \theta_i}\Big], \tag{19}$$

$$\mathrm{Var}\big[\partial P_f / \partial \theta_i\big] = \mathrm{Var}\Big[\frac{I_F(\mathbf{x})}{h_R(\mathbf{x})} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \theta_i}\Big] + \mathrm{Var}\Big[\frac{I_F(\mathbf{x})}{h_S(\mathbf{x})} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \theta_i}\Big], \tag{20}$$

在数值模拟的过程中考虑用样本平均值和方差代替总体的数学期望和方差，可近似得到可靠性灵敏度估计值 $\partial \hat{P}_f / \partial \theta_i$ 的方差和变异系数分别如下

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(\partial \hat{P}_f / \partial \theta_i) = & \mathrm{Var}(\partial \hat{P}_{Rf} / \partial \theta_i) + \mathrm{Var}(\partial \hat{P}_{Sf} / \partial \theta_i) \\ = & \frac{1}{N_R(N_R - 1)}\Big[\sum_{R_j=1}^{N_R}\Big\{\frac{I_F(\mathbf{x}_{R_j})}{h_R(\mathbf{x}_{R_j})} \frac{\partial f(\mathbf{x}_{R_j})}{\partial \theta_i}\Big\}^2 - \frac{1}{N_R}\Big\{\sum_{R_j=1}^{N_R} \frac{I_F(\mathbf{x}_{R_j})}{h_R(\mathbf{x}_{R_j})} \frac{\partial f(\mathbf{x}_{R_j})}{\partial \theta_i}\Big\}^2\Big] \\ & + \frac{1}{N_S(N_S - 1)}\Big[\sum_{S_j=1}^{N_S}\Big\{\frac{I_F(\mathbf{x}_{S_j})}{h_S(\mathbf{x}_{S_j})} \frac{\partial f(\mathbf{x}_{S_j})}{\partial \theta_i}\Big\}^2 - \frac{1}{N_S}\Big\{\sum_{S_j=1}^{N_S} \frac{I_F(\mathbf{x}_{S_j})}{h_S(\mathbf{x}_{S_j})} \frac{\partial f(\mathbf{x}_{S_j})}{\partial \theta_i}\Big\}^2\Big], \end{aligned} \tag{21}$$

$$\mathrm{Cov}(\partial \hat{P}_f / \partial \theta_i) = \sqrt{\mathrm{Var}(\partial \hat{P}_f / \partial \theta_i)} \Big/ |\partial \hat{P}_f / \partial \theta_i|, \quad i = 1, 2, \cdots, n. \tag{22}$$

### 3.3 基$\beta$面截断重要抽样的实施

以下将讨论$\beta$面截断重要抽样法实现过程中的两个关键问题，分别是$\beta$面截断重要函数抽样问题和区域、合适的样本量问题.

1) $\beta$面截断重要函数抽样问题

采用$h(\mathbf{x})$抽取样本点$\mathbf{x}$，如果

$$\sum_{i=1}^{n}\left((x_i-\mu_i)/\sigma_i\right)^2-\sum_{i=1}^{n}\left((x_i-D_{x_i})/\sigma_i\right)^2-\beta^2\geq 0$$

满足，则样本点落入重要区域$R$，否则，令$x_i=2D_{x_i}-x_i\,(i=1,2,\cdots,n)$，新得到的$\mathbf{x}$即落在重要区域$R$，即为$h_R(\mathbf{x})$的样本，具体见图2中左图所示所示. 同理，对于非重要区域$S$，采用$h_S(\mathbf{x})$抽样抽取样本点$\mathbf{x}$，如果

$$\sum_{i=1}^{n}\left((x_i-\mu_i)/\sigma_i\right)^2-\sum_{i=1}^{n}\left((x_i-D_{x_i})/\sigma_i\right)^2-\beta^2<0$$

满足，则样本点落入非重要区域$S$，即为$h_S(\mathbf{x})$的样本，否则，令$x_i=2D_{x_i}-x_i\,(i=1,2,\cdots,n)$，新得到的$\mathbf{x}$即落在非重要区域$S$，即为$h_S(\mathbf{x})$的样本，详见图2中的右图所示.

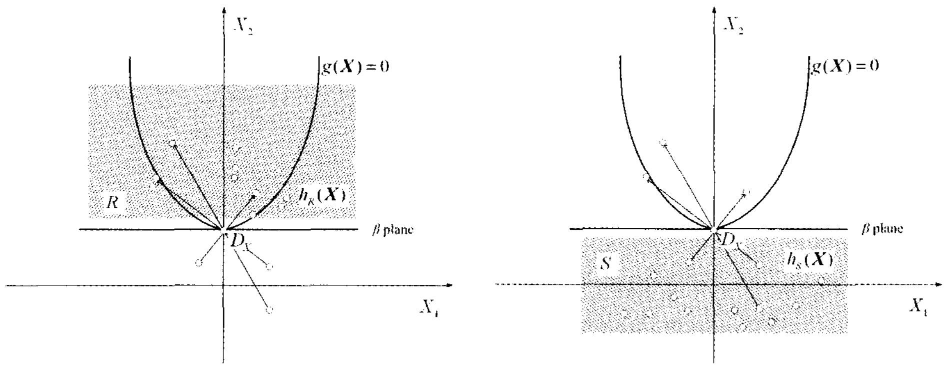


图2:　$\beta$截面截断重要抽样函数抽样示意图

2) 区域$R, S$合适的样本量问题

$R, S$区域合适的样本量，可采用迭代抽样来获取，具体过程可表述如下：

当抽样总数$N$确定时，文献[15]研究表明，按$\sqrt{\mathrm{Var}(\hat{P}_{Rf})}$与$\sqrt{\mathrm{Var}(\hat{P}_{Sf})}$的比率来分配子空间$R$与$S$的抽样量$N_R$和$N_S$，可使估计值方差最小，因此可按

$$N_R=N\sqrt{\mathrm{Var}(\hat{P}_{Rf})}\Big/\left(\sqrt{\mathrm{Var}(\hat{P}_{Rf})}+\sqrt{\mathrm{Var}(\hat{P}_{Sf})}\right),\tag{23}$$

$$N_S=N\sqrt{\mathrm{Var}(\hat{P}_{Sf})}\Big/\left(\sqrt{\mathrm{Var}(\hat{P}_{Rf})}+\sqrt{\mathrm{Var}(\hat{P}_{Sf})}\right),\tag{24}$$

来确定$N_R$和$N_S$.

由于$\mathrm{Var}(\hat{P}_{Rf})$, $\mathrm{Var}(\hat{P}_{Sf})$均为未知，因此本文采用迭代抽样方式，通过已有抽样信息，来确定下一次$R, S$区域合适抽样量，具体过程如下：

设前$l$次在$R$和$S$区域的样本量分别为$N_R^{(k)}$和$N_S^{(k)}$ $(k=0,1,\cdots,l)$，则$\mathrm{Var}(\hat{P}_{Rf}^{(l)})$, $\mathrm{Var}(\hat{P}_{Sf}^{(l)})$可以表示为

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\big(\hat{P}_{Rf}^{(l)}\big)=&\frac{1}{(\sum\limits_{k=1}^{l}N_R^{(k)})((\sum\limits_{k=1}^{l}N_R^{(k)})-1)}\cdot\Big[\sum_{k=1}^{l}\sum_{R_j^{(k)}=1}^{N_R^{(k)}}\Big\{\frac{f(\mathbf{x}_{R_j^{(k)}})I_F(\mathbf{x}_{R_j^{(k)}})}{h_R(\mathbf{x}_{R_j^{(k)}})}\Big\}^2\\&-\frac{1}{(\sum\limits_{k=1}^{l}N_l^{(k)})}\Big\{\sum_{k=1}^{l}\sum_{R_j^{(k)}=1}^{N_R^{(k)}}\Big\{\frac{f(\mathbf{x}_{R_j^{(k)}})I_F(\mathbf{x}_{R_j^{(k)}})}{h_R(\mathbf{x}_{R_j^{(k)}})}\Big\}\Big\}^2\Big],\end{aligned}\tag{25}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\big(\hat{P}_{Sf}^{(l)}\big)=&\frac{1}{(\sum\limits_{k=1}^{l}N_S^{(k)})((\sum\limits_{k=1}^{l}N_S^{(k)})-1)}\cdot\Big[\sum_{k=1}^{l}\sum_{S_j^{(k)}=1}^{N_S^{(k)}}\Big\{\frac{f(\mathbf{x}_{S_j^{(k)}})I_F(\mathbf{x}_{S_j^{(k)}})}{h_S(\mathbf{x}_{S_j^{(k)}})}\Big\}^2\\&-\frac{1}{(\sum\limits_{k=1}^{l}N_S^{(k)})}\Big\{\sum_{k=1}^{l}\sum_{S_j^{(k)}=1}^{N_S^{(k)}}\Big\{\frac{f(\mathbf{x}_{S_j^{(k)}})I_F(\mathbf{x}_{S_j^{(k)}})}{h_S(\mathbf{x}_{S_j^{(k)}})}\Big\}\Big\}^2\Big].\end{aligned}\tag{26}$$

第$(l+1)$次抽样在$R$和$S$区域的样本量$N_R^{(l+1)}$，$N_S^{(l+1)}$ $(l\geq 0)$可采用下式确定

$$N_R^{(l+1)}=N^{(l+1)}\sqrt{\mathrm{Var}(\hat{P}_{Rf}^{(l)})}\Big/\Big(\sqrt{\mathrm{Var}(\hat{P}_{Rf}^{(l)})}+\sqrt{\mathrm{Var}(\hat{P}_{Sf}^{(l)})}\Big),\tag{27}$$

$$N_S^{(l+1)}=N^{(l+1)}\sqrt{\mathrm{Var}(\hat{P}_{Sf}^{(l)})}\Big/\Big(\sqrt{\mathrm{Var}(\hat{P}_{Rf}^{(l)})}+\sqrt{\mathrm{Var}(\hat{P}_{Sf}^{(l)})}\Big),\tag{28}$$

其中$N^{(l+1)}$为第$(l+1)$次迭代在变量空间抽取的样本量.

### 3.4 基于$\beta$截面的截断重要抽样法的估算步骤

根据上述研究，可以给出基于$\beta$截面重要抽样法求解可靠性灵敏度的具体实施步骤如下：

1) 通过一次可靠度方法求解得到单个极限状态方程的设计点$D_{\mathbf{x}}$和可靠度指标$\beta$;

2) 在设计点$D_{\mathbf{x}}$处作失效面的虚拟切面，即$\beta$面，将变量空间分割成重要积分区域$R$和非重要抽样区域$S$，并建立截断重要抽样函数$h_R(\mathbf{x})$和$h_S(\mathbf{x})$;

3) 第一次抽样

假定$\mathrm{Var}(\hat{P}_{Rf}^{(0)})=\mathrm{Var}(\hat{P}_{Sf}^{(0)})$ (上标(0)表示第0次迭代运算)，通过(27),(28)式计算得到第一次采用截断重要抽样函数$h_R(\mathbf{x})$和$h_S(\mathbf{x})$抽取的样本量$N_R^{(1)}$, $N_S^{(1)}$;

4) 第$(l+1)$次抽样

通过前$l$次抽样信息，代入(25),(26)式中计算$\mathrm{Var}(\hat{P}_{Rf}^{(l)})$，$\mathrm{Var}(\hat{P}_{Sf}^{(l)})$，通过(27),(28)式计算得到第$(l+1)$次采用截断重要抽样函数$h_R(\mathbf{x})$和$h_S(\mathbf{x})$抽取的样本量$N_R^{(l)}$，$N_S^{(l)}$;

5) 采用(17),(18)式计算可靠性灵敏度的估计值，通过(21),(22)式计算其方差和变异系数，如果变异系数小于给定值，即算法收敛，否则令$l=l+1$，返回第4)步至算法收敛.

## 4 算例分析

**算例1** 高维非线性极限状态函数为$g(\mathbf{x})=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2-x_6+3$，各随机变量相互独立，且服从标准正态分布. 采用改进的一次二阶矩法求得设计点为：[0,0,0,0,0,3]. 采用

传统重要抽样法、$\beta$球截断重要抽样法和$\beta$面截断重要抽样法三种方法对重要变量$x_6$作可靠性灵敏度分析，其可靠性灵敏度估计和变异系数计算结果见表1.

表1: 算例1的计算结果

| 方法 | | 传统重要抽样法 | $\beta$球截断重要抽样法 | | $\beta$面截断重要抽样法 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 抽样数目 | | $5\times10^6$ | $4.05\times10^6$ | $5\times10^6$ | $2.65\times10^6$ | $5\times10^6$ |
| $\partial\hat{P}_f/\partial\mu_6$ | 估计值 | 0.000026 | 0.000026 | 0.000026 | 0.000026 | 0.000026 |
| | 变异系数 | 0.00642 | 0.00639 | 0.00575 | 0.00635 | 0.00454 |
| | 相对误差(%) | / | 0.07736 | 0.2830 | 1.0838 | 0.09498 |
| $\partial\hat{P}_f/\partial\sigma_6$ | 估计值 | 0.000094 | 0.000093 | 0.000093 | 0.000083 | 0.000094 |
| | 变异系数 | 0.00586 | 0.00583 | 0.00525 | 0.00578 | 0.00414 |
| | 相对误差(%) | / | 0.07282 | 0.2594 | 0.9943 | 0.1063 |

以传统重要抽样法估算值为精确值，算例1采用本文方法估算可靠性灵敏度，其相对误差不超过2%；在估计值相同变异系数下，本文方法所需样本量是传统重要抽样法的52%，是$\beta$球截断重要抽样法的64.197%.

**算例2** 如图3所示的九盒段机翼模拟结构由64个杆元件和42个板元件构成，材料为铝合金，原始数据取自文献[16]. 各变量服从正态分布，外载荷$P$的均值和变异系数分别为$\mu_P=150\,\mathrm{kg}$, $\mathrm{Cov}(P)=0.25$，第$i$个单元强度$R_i$的均值和变异系数分别为$\mu_{R_i}=83.5\,\mathrm{kg}$, $\mathrm{Cov}(R_i)=0.12$. 由失效模式的枚举方法可求得结构体系的一个主要失效模式的极限状态函数为$g=4.0R_{68}-3.9998R_{77}+4.0R_{78}-P$. 可靠性灵敏度估计值及其变异系数如表2所示.

以传统重要抽样法估算值为精确值，算例2采用本文方法估算可靠性灵敏度，其相对误差不超过1%，在估计值相同变异系数下，算例2本文方法所需样本量是传统重要抽样法的63%，是$\beta$球截断重要抽样法的84%.

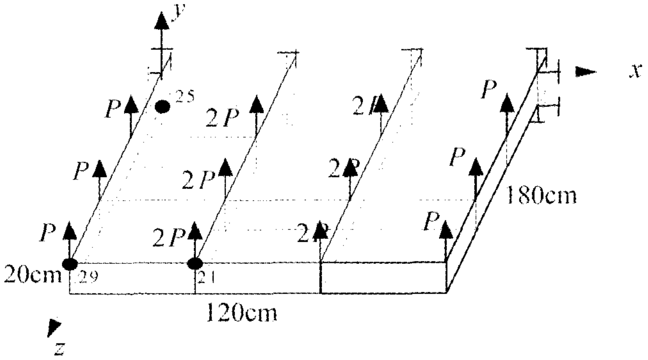


图3: 九盒段结构示意图

**算例3** 并联系统由两极限状态方程组成$g_1(\mathbf{x})=x_1^2-5x_1-8x_2+16$, $g_2(\mathbf{x})=-16x_1+x_2^2+32$，其中包含的随机变量均服从相互独立的标准正态分布，先通过优化方法得到并联系统

最可能失效点，以该点为抽样中心，按照(12),(13)式建立截面截断重要抽样函数，其可靠性灵敏度估算见下表3所示.

算例3显示本文所提方法可以推广应用到并联系统可靠性灵敏度分析中，与传统重要抽样法相比，本文方法估算失效概率的相对误差小于1%，在估计值相同变异系数下，本文方法所需计算量为传统重要抽样法的46%，是$\beta$球截断重要抽样法的77.966%.

表2: 算例2的计算结果

| 方法 | | 传统重要抽样法 | $\beta$球截断重要抽样法 | | $\beta$面截断重要抽样法 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 抽样数目 | | $5\times10^6$ | $3.75\times10^6$ | $5\times10^6$ | $3.15\times10^6$ | $5\times10^6$ |
| | 估计值 | -0.00134 | -0.00133 | -0.00134 | -0.0013 | -0.00134 |
| $\partial\hat{P}_f/\partial\mu_{68}$ | 变异系数 | 0.00089 | 0.00089 | 0.00077 | 0.00094 | 0.00075 |
| | 相对误差(%) | / | 0.01572 | 0.07413 | 0.02396 | 0.03220 |
| | 估计值 | 0.00158 | 0.00158 | 0.00158 | 0.00158 | 0.00158 |
| $\partial\hat{P}_f/\partial\sigma_{68}$ | 变异系数 | 0.00149 | 0.00149 | 0.00129 | 0.00169 | 0.00134 |
| | 相对误差(%) | / | 0.02781 | 0.1157 | 0.04297 | 0.03033 |
| | 估计值 | 0.00133 | 0.00133 | 0.00133 | 0.00133 | 0.00133 |
| $\partial\hat{P}_f/\partial\mu_{77}$ | 变异系数 | 0.00087 | 0.00087 | 0.00075 | 0.00090 | 0.00071 |
| | 相对误差(%) | / | 0.01501 | 0.02551 | 0.02176 | 0.01200 |
| | 估计值 | 0.00158 | 0.00158 | 0.00158 | 0.00158 | 0.00158 |
| $\partial\hat{P}_f/\partial\sigma_{77}$ | 变异系数 | 0.00144 | 0.00144 | 0.00124 | 0.00159 | 0.00126 |
| | 相对误差(%) | / | 0.00807 | 0.06721 | 0.09257 | 0.06721 |
| | 估计值 | -0.00134 | -0.00134 | -0.00134 | -0.00133 | -0.00133 |
| $\partial\hat{P}_f/\partial\mu_{78}$ | 变异系数 | 0.00084 | 0.00083 | 0.00072 | 0.00081 | 0.00065 |
| | 相对误差(%) | / | 0.00974 | 0.00749 | 0.09811 | 0.06816 |
| | 估计值 | 0.00158 | 0.00158 | 0.00158 | 0.00158 | 0.00158 |
| $\partial\hat{P}_f/\partial\sigma_{78}$ | 变异系数 | 0.00136 | 0.00135 | 0.00117 | 0.00144 | 0.00144 |
| | 相对误差(%) | / | 0.01011 | 0.01517 | 0.2415 | 0.1523 |
| | 估计值 | 0.00334 | 0.00334 | 0.003334 | 0.00334 | 0.00334 |
| $\partial\hat{P}_f/\partial\mu_P$ | 变异系数 | 0.00095 | 0.00094 | 0.00082 | 0.0011 | 0.00083 |
| | 相对误差(%) | / | 0.01499 | 0.04227 | 0.06415 | 0.01001 |
| | 估计值 | 0.00037 | 0.00037 | 0.00037 | 0.00037 | 0.00037 |
| $\partial\hat{P}_f/\partial\sigma_P$ | 变异系数 | 0.00169 | 0.00168 | 0.00146 | 0.00120 | 0.00159 |
| | 相对误差(%) | / | 0.01920 | 0.08464 | 0.07436 | 0.1444 |

## 5 结论

本文在传统重要抽样法基础上提出了基于$\beta$面的截断重要抽样法来求解结构可靠性灵敏度. 该方法在设计点处作失效面的虚拟切面，即$\beta$截面，将变量空间分成重要抽样域$R$和非重

要抽样域$S$，并在$R$和$S$区域分别建立相应的截断重要抽样函数，根据$R$和$S$区域对可靠性灵敏度的贡献额不同来分配截面截断重要抽样函数的样本量，从而提高了抽样效率．算例分析表明，与重要抽样法估算结果相比，本文方法的相对误差小于2%；在估计值相同变异系数下，该方法所需样本量比传统重要抽样法少近50%；与$\beta$球截断重要抽样法相比，本文方法在高维情况下有明显优势，并且并不需要准确求得可靠度指标，因而本文方法应用范围更广．本文方法还可以推广应用到并联系统可靠性灵敏度分析中．

表3: 算例3的计算结果

| 方 法 | | 传统重要抽样法 | $\beta$球截断重要抽样法 | | $\beta$面截断重要抽样法 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 抽样数目 | | $5\times10^6$ | $2.95\times10^6$ | $5\times10^6$ | $2.3\times10^6$ | $5\times10^6$ |
| $\partial\hat{P}_f/\partial\mu_1$ | 估计值 | 0.00398 | 0.00398 | 0.00398 | 0.00398 | 0.00398 |
| | 变异系数 | 0.00134 | 0.00133 | 0.00102 | 0.00132 | 0.00089 |
| | 相对误差(%) | / | 0.01308 | 0.03069 | 0.1185 | 0.06037 |
| $\partial\hat{P}_f/\partial\sigma_1$ | 估计值 | 0.00857 | 0.00857 | 0.00858 | 0.00858 | 0.00858 |
| | 变异系数 | 0.00122 | 0.00122 | 0.000933 | 0.00119 | 0.00081 |
| | 相对误差(%) | / | 0.01423 | 0.03826 | 0.1015 | 0.06334 |
| $\partial\hat{P}_f/\partial\mu_2$ | 估计值 | 0.00257 | 0.00257 | 0.00257 | 0.00257 | 0.00257 |
| | 变异系数 | 0.00131 | 0.00131 | 0.00100 | 0.00130 | 0.00088 |
| | 相对误差(%) | / | 0.01208 | 0.02455 | 0.1122 | 0.05339 |
| $\partial\hat{P}_f/\partial\sigma_2$ | 估计值 | 0.00277 | 0.00277 | 0.00277 | 0.00277 | 0.00277 |
| | 变异系数 | 0.00120 | 0.00119 | 0.00091 | 0.00116 | 0.00079 |
| | 相对误差(%) | / | 0.01119 | 0.01553 | 0.08016 | 0.04008 |

## 参考文献：


[1] Wu Y T, Sitakanta M. Variable screening and ranking using sampling-based sensitivity measures[J]. Reliability Engineering and System Safety, 2006, 91(6): 634-647

[2] Wu Y T. Computational methods for efficient structural reliability and reliability sensitivity analysis[J]. AIAA Journal, 1994, 32(8): 1717-1723

[3] Melchers R E, Ahammed M. A fast approximate method for parameter sensitivity estimation in Monte-Carlo reliability[J]. Computers and Structures, 2004, 82(1): 55-61

[4] Bucher C G. Adaptive sampling-aniterative fast Monte-Carlo procedure[J]. Structural Safety, 1988, (5): 119-126

[5] Melchers R E. Search-based importance sampling[J]. Structural Safety, 1990, 9(2): 117-128

[6] Melchers R E. Importance sampling in structural system[J]. Structural Safety, 1989, 6(1): 3-10

[7] Yaacob I. Observations on applications of importance sampling in structural reliability analysis[J]. Structural Safety, 1991, 9(4): 269-281

[8] 袁修开，吕震宙. 可靠性灵敏度分析的重要抽样方法[J]. 机械强度，2007, 29(5): 760-764
Yuan X K, Lv Z Z. Reliability sensitivity analysis method based on importance sampling[J]. Journal of Mechanical Strength, 2007, 29(5): 760-764

[9] 万越，吕震宙，袁修开. 重要抽样可靠性灵敏度的方差分析[J]. 机械强度，2008, 30(4): 606-611
Wan Y, Lv Z Z, Yuan X K. Variance analysis of importance sampling based reliability sensitivity[J]. Journal of Mechanical Strength, 2008, 30(4): 606-611

[10] 张峰，吕震宙. 可靠性灵敏度分析的自适应重要抽样法[J]. 工程力学，2008, 25(4): 80-84
Zhang F, Lv Z Z. An adaptive importance sampling method for estimation of reliability sensitivity[J]. Engineering Mechanics, 2008, 25(4): 80-84
[11] 宋述芳，吕震宙，傅霖. 基于线抽样的可靠性灵敏度分析方法[J]. 力学学报，2007, 39(4): 564-570
Song S F, Lv Z Z, Fu L. Reliability sensitivity algorithm based on line sampling[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2007, 39(4): 564-570
[12] 何红妮，吕震宙. 线抽样可靠性灵敏度的方差分析[J]. 中国机械工程，2008, 19(10): 1153-1156
He H N, Lv Z Z. Variance analysis of line sampling based reliability sensitivity[J]. China Mechanical Engineering, 2008, 19(10): 1153-1156
[13] 袁修开，吕震宙，宋述芳. 失效概率计算的截断重要抽样法[J]. 西北工业大学学报，2007, 25(5): 752-756
Yuan X K, Lv Z Z, Song S F. Improving further importance sampling (IS) method for failure probability estimation[J]. Journal of Northwestern Polytechnical University, 2007, 25(5): 752-756
[14] 万越，吕震宙，袁修开. 改进的重要抽样可靠性灵敏度估计及其方差分析[J]. 机械设计，2008, 25(12): 69-73
Wan Y, Lv Z Z, Yuan X K. An improved importance sampling method for reliability sensitivity and its variance analysis[J]. Journal of Machine Design, 2008, 25(12): 69-73
[15] 茆诗松. 高等数理统计[M]. 北京：高等教育出版社，1998
Mao S S. Advanced Mathematical Stastistics[M]. Beijing: China Higher Education Press, 1998
[16] 宋笔锋. 结构体系失效概率计算方法研究[D]. 西安：西北工业大学，1994
Song B F. A study on method for computing structural system failure probability[D]. Xi'an: Northwestern Polytechnical University, 1994

# Improved Reliability Sensitivity Estimation and its Variance Analysis by a Novel $\beta$ Hyper-plane Based Importance Sampling Method

ZHANG Feng[1,2], LV Zhen-zhou[2], CUI Li-jie[2]

(1- College of Mechanics and Civil & Architecture, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710129; 2- College of Aeronautics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072)

**Abstract:** A novel $\beta$ hyper-plane based importance sampling method is presented to estimate reliability sensitivity of a structure. By introducing a virtual hyper-plane tangent to the failure surface, the variable space is separated into an importance region $R$ and a unimportance region $S$, on which the truncated importance sampling functions $h_R(\mathbf{x})$ and $h_S(\mathbf{x})$ are established, respectively. The sampling numbers generated from $h_R(\mathbf{x})$ and $h_S(\mathbf{x})$ are dependent on the contribution of the reliability sensitivity, which is determined by the iterative simulations. The formulae of the reliability sensitivity estimation, the variance and the coefficient of variation are derived for the presented $\beta$ hyper-plane importance sampling method. The presented method is suitable for the reliability sensitivity estimation of both the single failure mode and the multiple failure mode in parallel. Examples show that the proposed method is more efficient than the traditional importance sampling method and the $\beta$ hyper-sphere importance sampling method, in the case that the variation coefficients of three estimations keep the same quantity and the relative errors of the reliability sensitivity estimations are less than 2%.

**Keywords:** design point; $\beta$ hyper-plane; $\beta$ hyper-plane based importance sampling method; reliability sensitivity; variation coefficient

**Received:** 18 May 2009. **Accepted:** 21 Apr 2010.

**Foundation item:** The National Natural Science Foundation of China (10572117; 50875213); the New Century Program for Excellent Talents of Ministry of Education of China (NCET-05-0868); the Aeronautical Science Foundation of China (2007ZA53012); the National High-tech Research and Development Program (2007AA04Z401).